

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ
ПО МОДУЛЮ I КУРСА “ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО”

для ИУ9, лектор Четвериков В. Н., 2019 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение дифференцируемости функции комплексного переменного и комплексной производной. Сформулировать и доказать теорему о их связи.
2. Дать определение дифференцируемости функции комплексного переменного и аналитической функции в точке. Сформулировать и доказать теорему об условиях Коши–Римана. Дать определение пары сопряженных гармонических функций.
3. Описать конструкцию стереографической проекции. Дать определение бесконечно удаленной точки, расширенной комплексной плоскости, окрестности бесконечно удаленной точки, дифференцируемости в бесконечности.
4. Дать определение производной по направлению и формальных производных. Описать геометрический смысл комплексной производной.
5. Дать определение конформного отображения. Сформулировать и доказать теорему о связи конформности и дифференцируемости функции. Дать определение угла и конформности в бесконечно удаленной точки.
6. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО), дать его геометрическую интерпретацию. Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.
7. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО), дать его геометрическую интерпретацию. Сформулировать и доказать круговое свойство ДЛО.
8. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать свойство ДЛО сохранения симметричности относительно обобщенной окружности.
9. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО), дать его геометрическую интерпретацию. Сформулировать и доказать свойство трёх точек.
10. Определить функции z^n и $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$. Вывести их основные (максимальные) области конформности и однолистности.
11. Определить функции e^z и $\operatorname{Ln} z$. Вывести их основные (максимальные) области конформности и однолистности.

12. Определить тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Вывести их основные области конформности и однолиственности.
13. Определить функцию Жуковского, общую степенную и показательную функцию. Вывести основные (максимальные) области конформности и однолиственности функции Жуковского.
14. Сформулировать теорему Римана и принцип симметрии Римана–Шварца.
15. Сформулировать принцип соответствия границ и обратный принцип соответствия границ.

ЗАДАЧИ

1. Найдите область аналитичности функции f , на этой области найдите производную $f'(z)$ (если существует).
 - а) (2 балла). $f(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$,
 - б) (2 балла). $f(x, y) = x^2y + icy^2$.
2. (3 балла). Определите круг сходимости заданного степенного ряда. Сходится ли ряд в заданной точке z_1 ? Если сходится, то как — абсолютно или условно?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (z + i\sqrt{3})^{2n}}{3^n \sqrt{n^2 + 1} + \ln n}, \quad z_1 = 0.$$

3. Отобразить указанные области на верхнюю полуплоскость при помощи конформного отображения.
 - а) (4 балла). Сегмент круга $|z + i| < \sqrt{2}$, $\text{Im } z > 0$.
 - б) (4 балла). Полосу $-1 < \text{Re } z < 1$ с разрезом по отрицательной части мнимой оси.